انتگرالی از تابع بسل

ثابت کنید

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-a^2x^2} J_n(bx)\,dx = \frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \tag{۱}$$

اثبات ۱.۰

با استفاده از سری توانی J_n می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{n+1} e^{-a^2x^2} J_n(bx)\,dx &= \int_0^\infty x^{n+1} e^{-a^2x^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{bx}{2}\right)^{2k+n} dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+n} \int_0^\infty x^{2(k+n)+1} e^{-a^2x^2}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \frac{\Gamma(n+k+1)}{2a^{2(k+n+1)}} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+n} \\
&= \frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{-b^2}{4a^2}\right)^k \\
&= \frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}
\end{aligned}$$

تمام

و در حالت خاص

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} J_0(2x) dx = \frac{1}{2e}$$

با همین روش می توان ثابت کرد

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad a>0,\ b>0$$